ANALYSIS

Betragsfunktionen

Teil 1

Lineare Betragsfunktionen

Datei Nr. 41021

Stand: 10. Oktober 2011

Friedrich W. Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Inhalt

1. Grundlage: Betrag einer Zahl

Das Thema „Betrag einer Zahl“ wird im Text 12160 im Ordner Algebra gründlich behandelt.
Dort wird erläutert, was Beträge sind und wie man Gleichungen und Ungleichungen löst, in dem Beträge vorkommen.

Hier nur ganz kurz eine Zusammenfassung.

Man hat den Betrag IxI einer Zahl x eingeführt, um eine Möglichkeit zu besitzen, eine Zahl x positiv zu machen. Ist die Zahl x schon positiv, etwa x = 3, dann verpufft natürlich die Betragswirkung, denn es ist I3I = 3. Ist aber die Zahl x negativ, etwa x = -3, dann tritt die Wirkung dieser Betragsfunktion ein, indem der Betrag aus -3 das Ergebnis 3 erstellt: I-3 I = 3.

Man kann vereinfachend sagen: Der Betrag einer Zahl sei die Zahl ohne Vorzeichen.
Man kann also den Betrag einer Zahl weglassen, wenn die Zahl positiv oder 0 ist, also wenn sie nicht negativ ist. Ist sie aber negativ, dann kann man an Stelle des Betrags auch ein zusätzliches Minuszeichen schreiben damit das Argument positiv wird: $\left|\boxed{-3}\right| = -\boxed{-3} = 3$

Für mathematische Zwecke braucht man jedoch folgende Definition:

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}}$$

Beispiele für Betragsrechnungen:

$|5| = 5$, $|-7| = 7$, $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$, $|x^2| = x^2$, $\left|\pm\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

Einfache Betragsgleichungen:

$|x| = 2$ hat die Lösungen $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$, denn es ist $|2| = 2$ und $|-2| = 2$.

$|x| = 12$ hat die Lösungen $x_1 = 12$ und $x_2 = -12$

$|x| = -4$ hat keine Lösungen, denn jeder Betrag ist ≥ 0!

$|x+3| = 8$ Das Argument muss 8 oder - 8 sein, also gilt

$x+3=8$ oder $x+3=-8$

$x_1 = 5$ $\quad$ $x_2 = -11$

Lösungsmenge: $L = \{5; -11\}$

Probe: $|5+3| = 8$ und $|-11+3| = |-8| = 8$

$\left|\frac{1}{2}x - 5\right| = 6$ Das Argument muss 6 oder -6 sein, also gilt:

$\frac{1}{2}x - 5 = 6$ oder $\frac{1}{2}x - 5 = -6$

$\frac{1}{2}x = 11$ $\quad$ $\frac{1}{2}x = -1$

$x_1 = 22$ $\quad$ $x_2 = -2$

Lösungsmenge: $L = \{-2; 22\}$

2. Die Grundfunktion: $f(x)=|x|$

Wie zuvor besprochen gilt für positive Werte von x: $|x| = x$

Und dasselbe für x = 0: $|0| = 0$.

$\left.\begin{array}{l} |x| = x \\ |0| = 0 \end{array}\right\} \quad |x| = x \ \text{ falls } \ x \geq 0$

Für negative x ändert der Betrag das Vorzeichen.

Dasselbe erreicht man durch ein zusätzliches Minuszeichen: $|x| = -x \quad \text{falls} \quad x < 0$

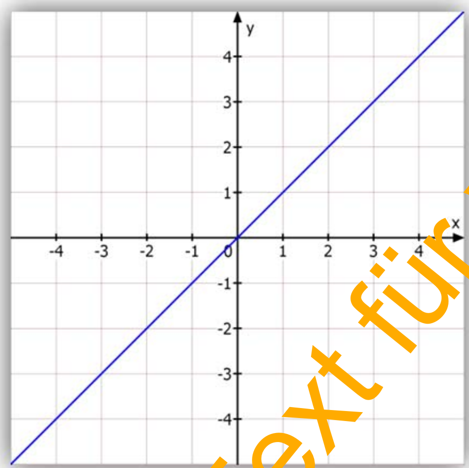
Daher kann man die einfachste Betragsfunktion so umschreiben:

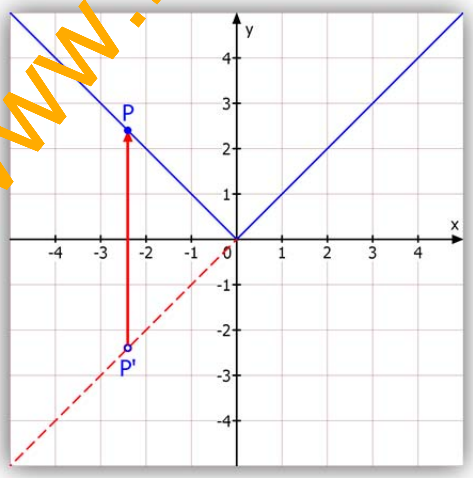
$$\boxed{f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}}$$

Das Schaubild links gehört zur Funktion $f(x) = x$.

Das rechte zeigt die Betragsfunktion $f(x) = |x|$.

Links ist angedeutet, dass der Betrag Punkte nach oben spiegelt, die wegen einer negativen y-Koordinate unter der x-Achse liegen:





Das Schaubild dieser Betragsfunktion ist also v-förmig und besteht aus zwei Halbgeraden.

Die Funktion ist bei x = 0 stetig, weil der Grenzwert von links: $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -0 = 0$,

der Grenzwert von rechts $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 0$ und der Funktionswert $f(0) = |0| = 0$ gleich sind.

Sie hat jedoch einen Knick, was man auch als nicht differenzierbar an der Stelle 0 bezeichnet. Darauf wird in diesem Text nicht weiter eingegangen.

3. Betragsfunktionen der Form $f(x) = |ax + b|$

Beispiel 1: $f(x) = |x-2|$

Man nennt den Term zwischen den Betragsstrichen das Argument des Betrags.

Zur betragsfreien Schreibweise der Funktion muss man diese Untersuchung vornehmen:

1. Wann ist das Argument $x-2 \geq 0$? $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

   Folgerung: Für $x \geq 2$ kann man die Betragsstriche weglassen.

2. Wann ist das Argument $x-2 < 0$? $x-2 < 0 \Leftrightarrow x < 2$

   Folgerung: Für $x > 2$ ändert der Betrag das Vorzeichen des Arguments.
   Das kann auch dadurch geschehen, dass man vor das Argument ein Minuszeichen setzt.

Ergebnis:

$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{für } x \geq 2 \\ -(x-2) = -x+2 & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

Die Zeichnung kann man auf zweierlei Arten erstellen.

1. Möglichkeit: Für $x \geq 2$ zeichnet man die Gerade $y = x-2$. Diese hat ihren y-Achsenabschnitt in $A(0\,|\,-2)$ und die Steigung 1. Benötigt wird jedoch nur die Halbgerade ab dem Schnittpunkt $N(2\,|\,0)$ mit der x-Achse nach rechts,
Für $x < 2$ zeichnet man die (Halbgerade) $y = -x-2$ mit dem y-Achsenabschnitt $B(0\,|\,2)$ und der Steigung -1. Sie gilt links von x = 2. (Abb. 1)

2.Möglichkeit: Man zeichnet dann die Gerade $y = x-2$ und spiegelt den Teil links von $N(2\,|\,0)$, der ja die Punkte mit negativem y-Wert enthält, an der x-Achse nach oben. (Abb. 2)

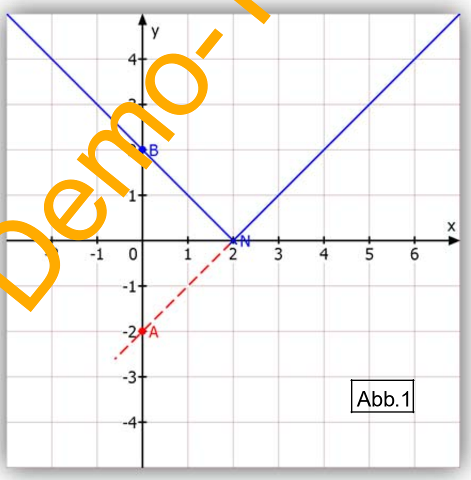


Abb.1

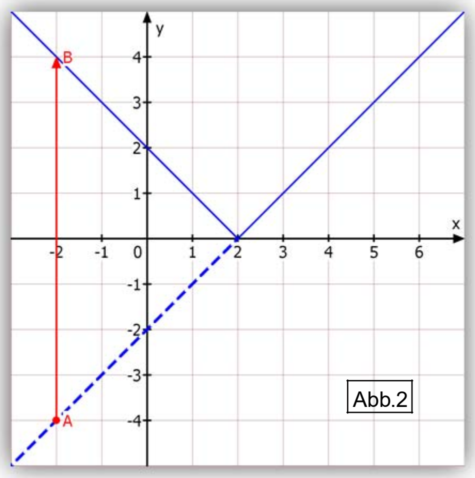


Abb.2

Hinweis: f ist überall stetig.

Allgemein gilt:

$$f(x) = |\text{Arg}| = \begin{cases} \text{Arg} & \text{falls Arg} \geq 0\text{, d.h. für } x \ldots. \\ -(\text{Arg}) & \text{falls Arg} < 0 \text{ d.h. für } x \ldots \end{cases}$$

Dieses Minuszeichen ersetzt den Betrag für negative Argumente !

Beispiel 2:

$$f(x) = \left|\tfrac{1}{2}x + 2\right|$$

Betragsfreie Darstellung:

$\frac{1}{2}x + 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x \geq -2 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -4$

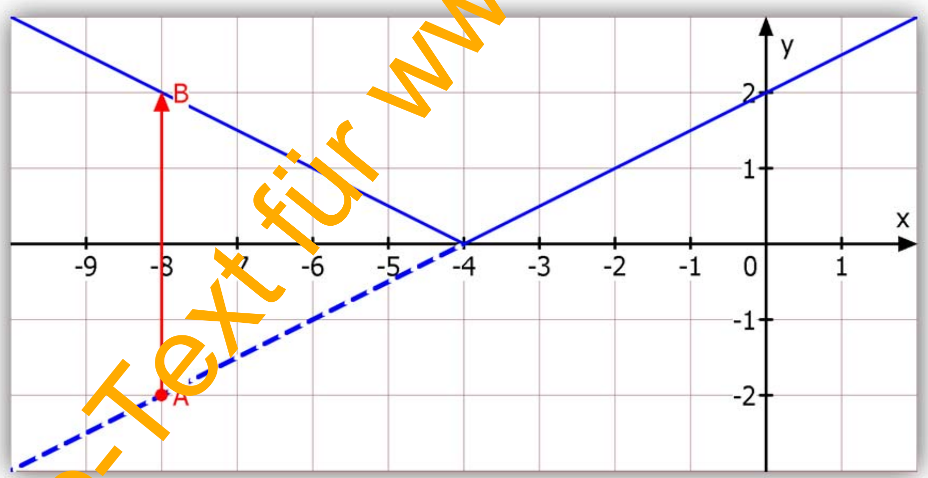
$\frac{1}{2}x + 2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x < -2 \quad \Leftrightarrow \quad x < -4$

Ergebnis:

$$f(x) = \left|\tfrac{1}{2}x + 2\right| = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & \text{für } x \geq -4 \\ -\left(\frac{1}{2}x + 2\right) = -\frac{1}{2}x - 2 & \text{für } x < -4 \end{cases}$$

Schaubild:

Entweder zeichnet man die beiden Halbgeraden $y = \frac{1}{2}x + 2$ ab -4 nach rechts und $y = -\frac{1}{2}x - 2$ ab -4 nach links, oder man zeichnet die Gerade $y = \frac{1}{2}x + 2$ und spiegelt den unter der x-Achse liegende Teil nach oben:



Stetigkeit:

f ist überall stetig, auch an der Nahtstelle x = -4.

Beispiel 3

$\boxed{f(x) = |-2x+2|}$

Betragsfreie Darstellung: $-2x+2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x \geq -2 \quad \Leftrightarrow \quad x \boxed{\leq} 1$

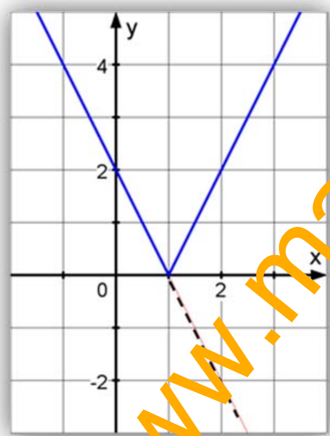
Achtung: Dividiert (oder multipliziert) man eine Ungleichung durch eine negative Zahl, hier (-2), dann ändert die Ungleichung ihre Richtung. Aus $\geq$ wurde also $\leq$.

Analog dazu gilt: $-2x+2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x < -2 \quad \Leftrightarrow \quad x \boxed{>} 1$

Ergebnis:

$$\boxed{f(x) = |-2x+2| = \begin{cases} -2x+2 & \text{für } x \leq -1 \\ -(-2x+2) = 2x-2 & \text{für } x > 1 \end{cases}}$$

Schaubild:



Wichtiger Hinweis:

Statt $|-2x+2|$ kann man auch $|2x-2|$ schreiben.

Man erkennt es, indem man die betragsfreie Darstellung berechnet.
Es gibt aber auch einen <u>algebraischen Beweis</u> dafür.

Dazu muss man zweierlei wissen: (1) Es gilt: $|a| \cdot |b| = |a \cdot b|$

(2) Es ist natürlich $|-1| = 1$

Also kann man so rechnen: $|-2x+2| \cdot 1 = |-2x+2| \cdot |-1| = |(-2x+2) \cdot (-1)| = |2x-2|$.

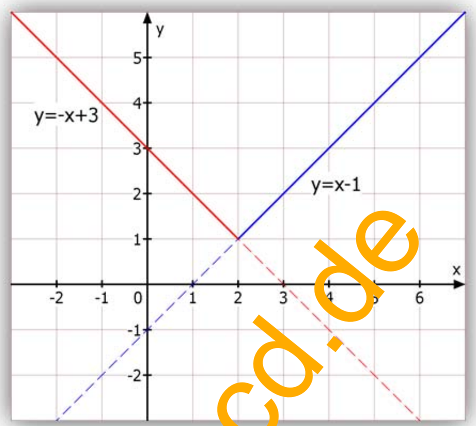
Merke:

Ändert man <u>alle</u> Vorzeichen des Argumentes, ändert dies die Betragsfunktion nicht.

So kann man Argumente mit negativer Steigungszahl in Argumente mit positiver Steigungszahl umwandeln, und manches wird einfacher.

$f(x) = |-3x-5|$ darf man also umschreiben in $f(x) = |3x+5|$.

4. Zusammengesetzte Betragsfunktionen



Beispiel 4: $f(x) = |x-2| + 1$

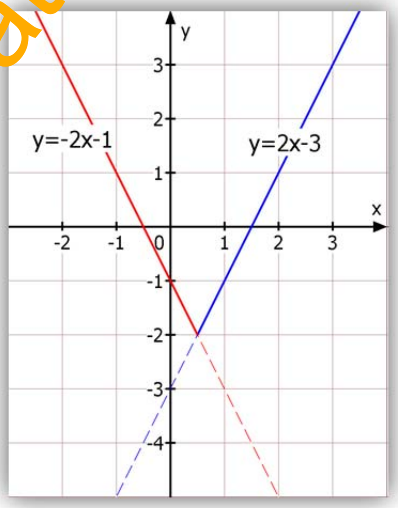
Betragsfreie Darstellung: $x - 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 2$

$x - 2 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < 2$

Umrechnung:

$$f(x) = |x-2| + 1 = \begin{cases} (x-2)+1 = \quad x-1 & \text{für } x \geq 2 \\ -(x-2)+1 = -x+3 & \text{für } x < 2 \end{cases}$$

Achtung: Der Summand +1 hat nichts mit dem Betrag zu tun, wird also nicht angepasst. Er ist auch der Grund dafür, dass die Spitze nicht wie bisher auf der x-Achse liegt, denn er verschiebt $y = |x-2|$ um 1 in y-Richtung.



Beispiel 5: $f(x) = |-2x+1| - 2$

Oder so: $f(x) = |2x-1| - 2$!!!

Betragsfreie Darstellung: $2x - 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq \frac{1}{2}$

$2x - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; x < \frac{1}{2}$

$$f(x) = |2x-1| - 2 = \begin{cases} (2x-1)-2 = \quad 2x-3 & \text{für } x \geq \frac{1}{2} \\ -(2x-1)-2 = -2x-1 & \text{für } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

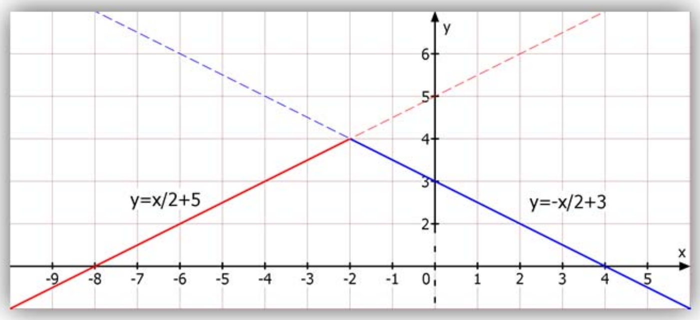
Beispiel 6: $f(x) = 4 - \left|\frac{1}{2}x + 1\right|$

Betragsfreie Darstellung: $\frac{1}{2}x + 1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}x \geq -1 \;\Leftrightarrow\; x \geq -2$

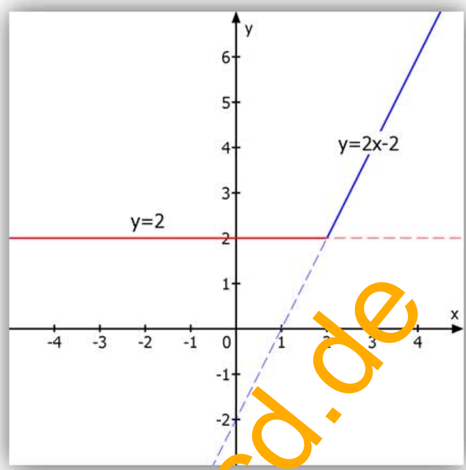
$\frac{1}{2}x + 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{2}x < -1 \;\Leftrightarrow\; x < -2$

$$f(x) = 4 - \left|\tfrac{1}{2}x + 1\right| = \begin{cases} 4 - \left(\frac{1}{2}x+1\right) = -\frac{1}{2}x + 3 & \text{für } x \geq -2 \\ 4 + \left(\frac{1}{2}x+1\right) = +\frac{1}{2}x + 5 & \text{für } x < -2 \end{cases}$$

Achtung: Bei der zweiten Teilfunktion kommen zwei Minuszeichen vor die Klammer, was zu einem + führt!



Beispiel 7: $f(x)=|x-2|+x$

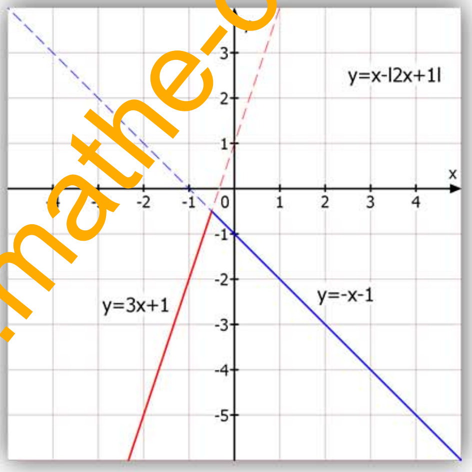


Betragsfreie Darstellung: $x-2\ge 0 \;\Leftrightarrow\; x\ge 2$

$x-2<0 \;\Leftrightarrow\; x<2$

$$f(x)=|x-2|+x=\begin{cases}+(x-2)+x=2x-2 & \text{für } x\ge 2\\ -(x-2)+x=2 & \text{für } x<2\end{cases}$$

Beispiel 8: $f(x)=x-|2x+1|$

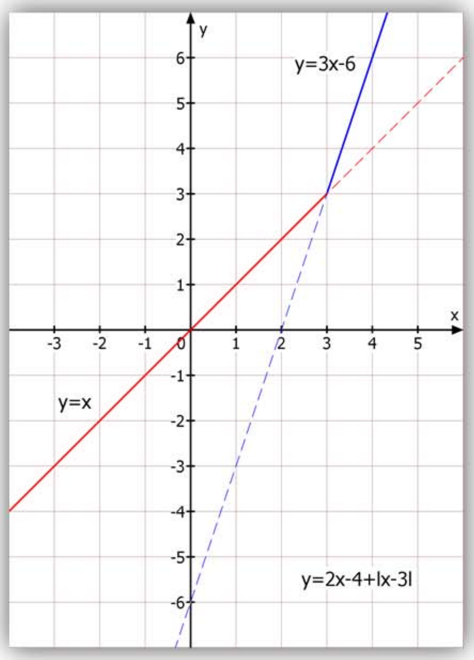


Betragsfreie Darstellung: $2x+1\ge 0 \;\Leftrightarrow\; x\ge -\frac{1}{2}$

$2x+1<0 \;\Leftrightarrow\; x<-\frac{1}{2}$

$$f(x)=x-|2x+1|=\begin{cases}x-(2x+1)=-x-1 & \text{für } x\ge -\frac{1}{2}\\ x+(2x+1)=3x+1 & \text{für } x<-\frac{1}{2}\end{cases}$$

Beispiel 9: $f(x)=2x-3+|x-3|$



Betragsfreie Darstellung: $x-3\ge 0 \;\Leftrightarrow\; x\ge 3$

$x-3<0 \;\Leftrightarrow\; x<3$

$$f(x)=2x-3+|x-3|=\begin{cases}2x-3+(x-3)=3x-6 & \text{für } x\ge 3\\ 2x-3-(x-3)=x & \text{für } x<3\end{cases}$$

Beispiel 10: $f(x) = |x+3| + |x-2|$

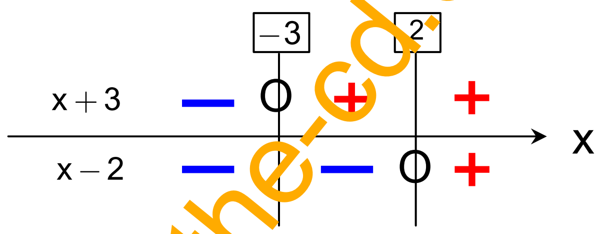
Jetzt muss man herausfinden, in welchem Intervall beide Argumente positiv sind, in welchem beide negativ sind, und wo sie verschiedene Vorzeichen haben.

Vorarbeit: $x+3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ und $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

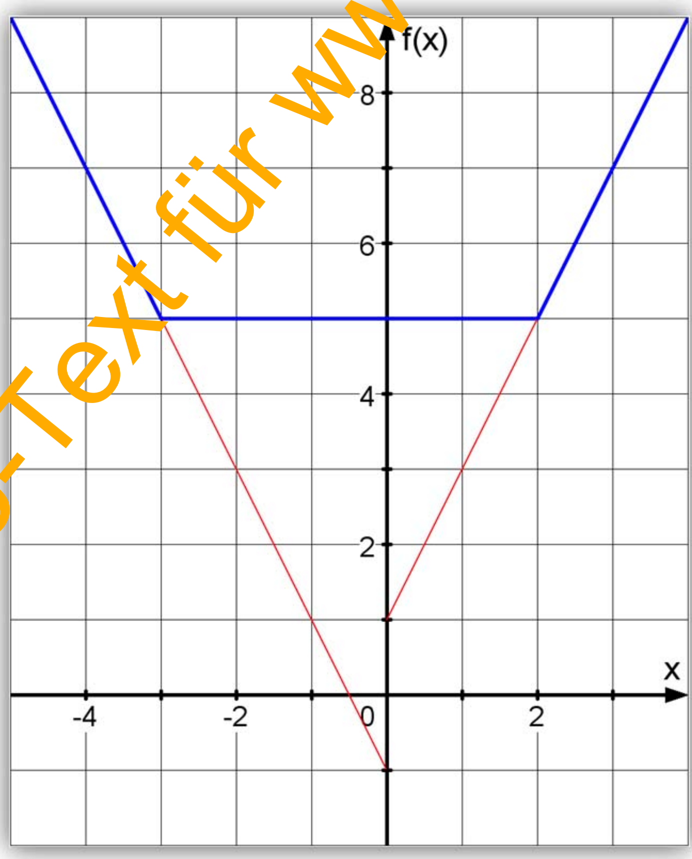
Man erkennt also, dass sich das Vorzeichen an den Stellen -3 und 2 ändert.

Diese Ergebnisse stellt man in einer **Vorzeichentabelle** zusammen:

Man erkennt daraus, dass man für x < -3 die Vorzeichen beider Argumente ändern muss, dass man für -3 < x < 3 das von (x-2) ändern muss, und dass für x > 2 beide Argumente positiv sind.



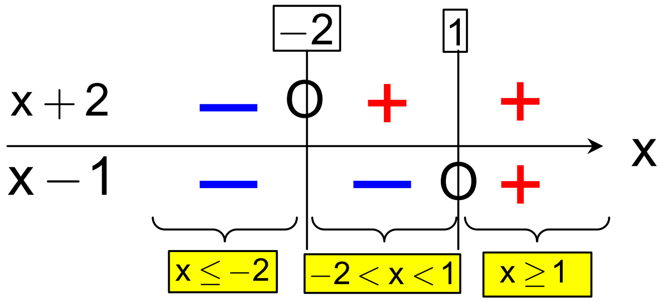
$$f(x) = |x+3| + |x-2| = \begin{cases} (-x-3)+(-x+2) = -2x-1 & \text{für } x < 3 \\ (x+3)+(-x+2) = 5 & \text{für } 3 \leq x \leq 2 \\ (x+3)+(x-2) = 2x+1 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$



Beispiel 11: $f(x) = |x+2| - |x-1|$

Vorzeichen der Argumente: $x+2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -2$ und $x-1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 1$

Vorzeichentabelle:



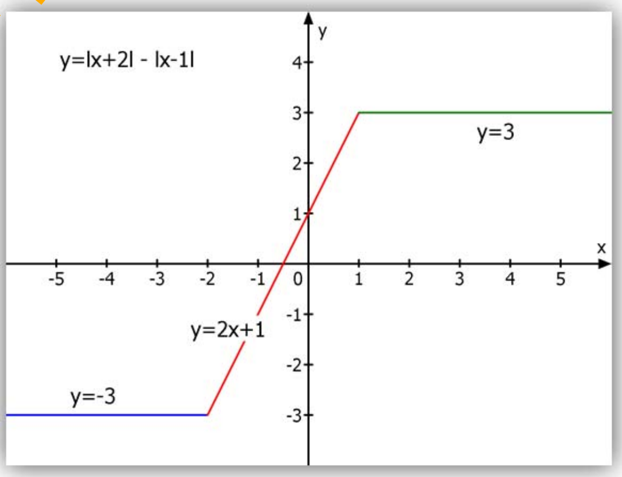
Für $x \leq -2$ sind beide Argumente negativ, also ändert hier der Betrag beide Vorzeichen.
Für -2<x<1 ist das zweite Argument negativ, hier ändert der Betrag das Vorzeichen.
Für $x \geq 1$ sind beide Argumente positiv, weshalb man hier die Betragsstriche weglassen kann:

$$f(x) = |x+2| - |x-1| = \begin{cases} -(x+2)+(x-1) = -3 & \text{für } x \leq -2 \\ +(x+2)+(x+1) = 2x+1 & \text{für } -2 < x < 1 \\ +(x+2)-(x-1) = 3 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

Noch eine Anmerkung zu den Vorzeichen bei der Zusammensetzung der Teilfunktionen.
Weil die Funktion stetig ist, kann man den Funktionswerte f(-2) auch bei der 2. Teilfunktion berechnen und genauso f(1). Diese Darstellung ist also auch richtig:

$$f(x) = |x+2| - |x-1| = \begin{cases} -(x+2)+(x-1) = -3 & \text{für } x < -2 \\ +(x+2)+(x-1) = 2x+1 & \text{für } -2 \leq x \leq 1 \\ +(x+2)-(x-1) = 3 & \text{für } x > 1 \end{cases}$$

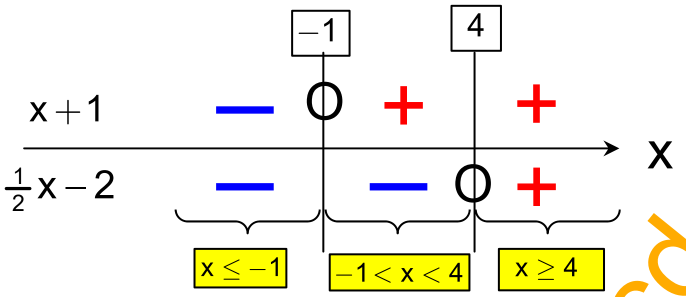
Schaubild von f:



Beispiel 13: $f(x) = |x+1| - |\tfrac{1}{2}x - 2|$

Vorzeichen der Argumente: $x+1 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq -1$ und $\tfrac{1}{2}x - 2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \geq 4$

Vorzeichentabelle:



Folgerung:

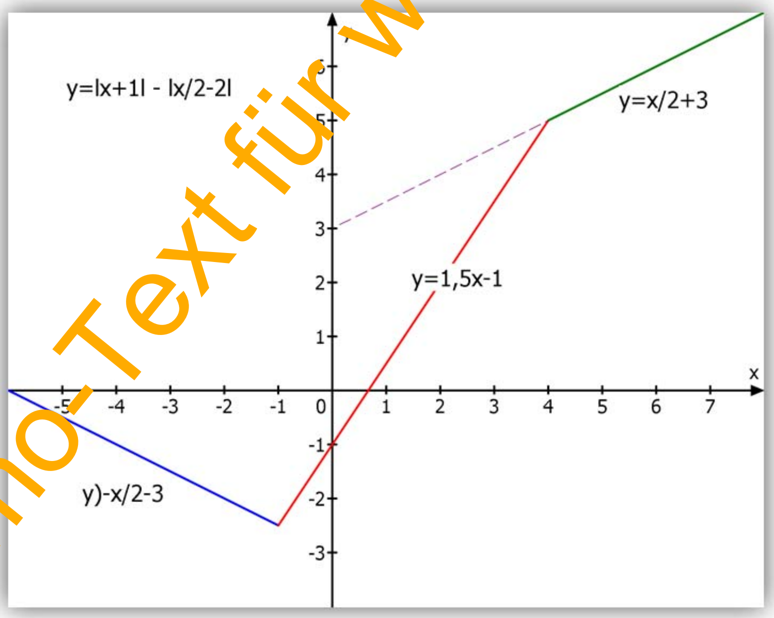
$$f(x) = |x+1| - |\tfrac{1}{2}x-2| = \begin{cases} -(x+1) + (\tfrac{1}{2}x-2) = -\tfrac{1}{2}x - 3 & \text{für } x < -1 \\ (x+1) + (\tfrac{1}{2}x-2) = \tfrac{3}{2}x - 1 & \text{für } -1 \leq x \leq 4 \\ (x+1) - (\tfrac{1}{2}x-2) = \tfrac{1}{2}x + 3 & \text{für } x > 4 \end{cases}$$

Für $x \leq -1$ sind beide Argumente negativ, also ändert hier der Betrag beide Vorzeichen.

Für -1<x<4 ist das zweite Argument negativ, hier ändert der Betrag das Vorzeichen.

Für $x \geq 4$ sind beide Argumente positiv, weshalb man hier die Betragsstriche weglassen kann:

Schaubild:



5. Trainingsaufgaben

Stelle f ohne Betragsstriche dar und zeichne das Schaubild

(1) $f(x) = |3x - 1|$

(2) $f(x) = |-3x + 2|$

(3) $f(x) = |-2x + 4|$

(4) $f(x) = |5x + 5|$

(5) $f(x) = |\tfrac{1}{4}x - \tfrac{1}{2}|$

(6) $f(x) = |-\tfrac{3}{2}x + 1|$

(7) $f(x) = -2 + |\tfrac{1}{2}x - 1|$

(8) $f(x) = \tfrac{1}{2}x - |x - 3|$

(9) $f(x) = |-\tfrac{1}{2}x + 3| + \tfrac{1}{2}x$

(10) $f(x) = |2x - 4| + |x - 3|$

(11) $f(x) = |\tfrac{1}{2}x - 3| + |\tfrac{1}{2}x + 1|$

(12) $f(x) = |2x - 4| - |x - 3|$

(13) $f(x) = |\tfrac{1}{2}x + 2| - |x - 2|$

(14) $f(x) = |2x - 8| - |-2x + 1|$

Lösungen

Auf der Mathe-CD